Title	可積分離散力学系について (離散可積分系に関する最近の話題)
Author(s)	太田, 泰広
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1170: 129-132
Issue Date	2000-09
URL	http://hdl.handle.net/2433/64404
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1170 巻 2000 年 129-132

可積分離散力学系について

広大工　太田泰広 (Yasuhiro Ohta)

1　はじめに

Painlevé 方程式などに代表される、いわゆる可積分な有限自由度力学系や、それらの離散化である有限自由度可積分離散力学系に対して、方程式やその解空間の研究をする際に、系がもつ対称性に注目することによって統一的な記述をしようという立場がある。本稿ではそのような立場に立って、特に双線形形式を出発点とすることによって、方程式やその Bäcklund 変換などを容易に構成できる様子を、q 離散 Painlevé VI 方程式を例にとって概説する。

比較のために KP 方程式のような無限自由度可積分系の場合を考えよう。よく知られているように双線形 KP 方程式

$$(D_{x_1}^4+3D_{x_2}^2-4D_{x_1}D_{x_3})\tau\cdot\tau=0$$

の場合には、τ を (x_1,x_2,x_3) だけでなく、$(x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots;n_1,n_2,n_3,n_4,\cdots)$ の函数と考えることによって、

$$(D_{x_1}^3D_{x_2}+2D_{x_2}D_{x_3}-3D_{x_1}D_{x_4})\tau\cdot\tau=0$$

$$(3D_{x_1}^2D_{x_2}^2+2D_{x_1}^3D_{x_3}+4D_{x_3}^2+3D_{x_2}D_{x_4}-12D_{x_1}D_{x_5})\tau\cdot\tau=0$$

$$\cdots$$

$$a_i(a_j-a_k)\tau^{n_i}\tau^{n_jn_k}+a_j(a_k-a_i)\tau^{n_j}\tau^{n_in_k}+a_k(a_i-a_j)\tau^{n_k}\tau^{n_in_j}=0$$

$$\cdots$$

などの方程式が成立し、これらの独立なすべての双線形方程式によって対称性が記述される。有限自由度可積分系の場合にも上と同様に、独立なすべての双線形方程式をリストアップすることによって、系とその対称性を含む全系を記述することが一つの目標となる。すべての有限次元格子に対して、可能な双線形方程式のリストアップができれば、可積分離散力学系の分類が完成することになると考えることができる。

2　q 離散 Painlevé VI 方程式の双線形形式

q 離散 Painlevé VI 方程式 [1)]

$$\frac{(\bar{x}x-\bar{z}z)(x\underline{x}-z\underline{z})}{(\bar{x}x-1)(x\underline{x}-1)}=\frac{(x-a_1z)(x-a_2z)(x-a_3z)(x-a_4z)}{(x-a_5)(x-a_6)(x-a_7)(x-a_8)} \tag{1}$$

(ただし、$\bar{z}=qz$, $\bar{a}_i=1/a_i$, $a_1a_2a_3a_4=a_5a_6a_7a_8=1$) に対する、双線形方程式による記述を考えよう。近年、坂井は離散/連続 Painlevé 方程式の分類を完成させたが [2)]、その分類中では上式はルート系 $R=A_1^{(1)}$ の場合に相当し、$E_7^{(1)}$ の対称性をもつ。すなわち、

二階常差分方程式 (1) は 7 次元の対称性をもち、τ 函数は $E_7^{(1)}$ の weight lattice 上の函数と考えられる。適当に座標軸を固定すれば、τ が定義される格子は

$$\left\{ \begin{pmatrix} n_1/\sqrt{2} \\ n_2 \\ \vdots \\ n_7 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} n_1 : \text{整数} \\ an_2, \cdots, n_7 : \text{全部が整数または全部が半奇数} \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_7 : \text{偶数} \end{array} \right\}$$

と書ける。すぐにわかるように、最近接の格子点同士の間の距離は $\sqrt{3/2}$、次最近接格子点間の距離は $\sqrt{2}$、次々最近接格子点では $\sqrt{7/2}$ である。さらに、次々最近接な二つの格子点の中点は実は、同時に 8 対の次々最近接格子点の中点になっていることがわかる。例えば、点 $(1/2\sqrt{2}, 1/2, 1/2, 1/2, 0, 0, 0)$ は次の 8 対の格子点の共通中点になっている。

$$\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\\1\\1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\\0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\\0\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\\1/2\\1/2\\1/2\\1/2\\1/2\\1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2\\-1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\\1/2\\1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\\1/2\\1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\\1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\1/2\\1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\\1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\\1/2\\1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\1/2\\1/2\\1/2\\1/2\\1/2\\-1/2 \end{pmatrix}$$

これら 8 対の格子点上の τ 函数を τ_i, σ_i $(i = 1, \cdots, 8)$ と書くと、双線形方程式は

$$\left(\frac{a_j}{a_k} - \frac{a_k}{a_j}\right)\tau_i\sigma_i + \left(\frac{a_k}{a_i} - \frac{a_i}{a_k}\right)\tau_j\sigma_j + \left(\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_j}{a_i}\right)\tau_k\sigma_k = 0 \qquad i, j, k = 1, \cdots, 8 \quad (2)$$

で与えられる。ここで、$a_i = q^{\boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{x}}$、$\boldsymbol{x}$ は中点の位置ベクトル、$\boldsymbol{v_i}$ は τ_i の格子点と σ_i の格子点を結ぶベクトル（次々最近接格子ベクトル）であり、$\boldsymbol{v_i}$ の向きは $\boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{v_j} = -1/2$ $(i \neq j)$ となるように相対的に固定する。すべての中点に対し、またすべての i, j, k の組に対し、(2) の双線形方程式が成立する。

3 Bäcklund 変換の構成

双線形方程式 (2) より、中点において定義される非線形変数 x を

$$x = \frac{a_j\tau_i\sigma_i - a_i\tau_j\sigma_j}{\dfrac{\tau_i\sigma_i}{a_j} - \dfrac{\tau_j\sigma_j}{a_i}} \qquad i \neq j$$

によって定義すれば、これは i, j の選び方によらない。上式は、

$$\frac{\tau_i\sigma_i}{\tau_j\sigma_j} = \frac{x/a_i - a_i}{x/a_j - a_j} \tag{3}$$

と書き直せる。ある中点から最近接の中点は、もとの中点から (次最近接格子ベクトル)/2 だけシフトした位置にある。ただし、任意の次最近接格子ベクトル（126 本ある）でいいわけではなく、126 本のうちの $(\boldsymbol{v_i} + \boldsymbol{v_j} + \boldsymbol{v_k} + \boldsymbol{v_l})/4$ （i, j, k, l は相異なる）と一致する 70 本の次最近接ベクトルに対してのみ、(次最近接ベクトル)/2 だけシフトした位置が再び中点になる。この 35 方向のうちの任意の 1 方向への x の発展を記述しているのが q 離散 Painlevé VI 方程式 (1) である。

いま、中点 $\boldsymbol{x}$ における非線形変数 x と次々最近接ベクトル $\boldsymbol{v_i}$ $(i = 1, \cdots, 8)$ を考え、中点 $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3} + \boldsymbol{v_4})/4$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3} + \boldsymbol{v_4} + \boldsymbol{v_5})/4$ における非線形変数を $\bar{x}, y$ と書く。これらの三点 $\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}$ は、正三角形をなすことに注意する。三点のそれぞれの周りに、8 対 16 個の次々最近接の位置にある τ がいるが、それらのうち、$\boldsymbol{x}$ と $\bar{\boldsymbol{x}}$ の両方に対して共通で、$\boldsymbol{y}$ に対して次々最近接ではない τ が 2 個あり、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の両方に共通で、$\bar{x}$ に対してそうではない τ が 2 個存在し、かつ、それら 4 個の τ は $\boldsymbol{x}$ の周りでは $\boldsymbol{v_1}$ と $\boldsymbol{v_5}$ の両端点である。同様に、$\bar{\boldsymbol{x}}$ と $\boldsymbol{y}$ の周りでは次々最近接で、$\boldsymbol{x}$ にとって次々最近接ではない τ が 2 個あるが、その 2 個の τ を τ_a, τ_b と書き、これらを端点とする $\bar{\boldsymbol{x}}$ での次々最近接格子ベクトルを $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_5}$ とおき、$\boldsymbol{y}$ での次々最近接格子ベクトルを $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_5}$ とおく。$a_i = q^{\boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{x}}$, $b_i = q^{\boldsymbol{w_i} \cdot \bar{\boldsymbol{x}}}$, $c_i = q^{\boldsymbol{u_i} \cdot \boldsymbol{y}}$, とおくと、恒等式

$$\frac{\tau_1\sigma_1}{\tau_5\sigma_5}\frac{\tau_5\tau_b}{\tau_a\sigma_1}\frac{\tau_a\sigma_5}{\tau_1\tau_b} = 1$$

と x の定義式 (3) より直ちに

$$\frac{x/a_1 - a_1}{x/a_5 - a_5}\frac{\bar{x}/b_1 - b_1}{\bar{x}/b_5 - b_5}\frac{y/c_1 - c_1}{y/c_5 - c_5} = 1 \tag{4}$$

を得る。上式が、最小の正三角形をなす三つの中点 $\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}$ 上での三つの変数 $x, \bar{x}, y$ の間の関係式、すなわち q 離散 Painlevé VI 方程式の Bäcklund 変換そのものである。

4 q 離散 Painlevé VI 方程式の導出

上記の Bäcklund 変換の式 (4) は、簡単な計算により

$$\frac{q^{2\bar{\boldsymbol{x}}^2}\bar{x} - q^{2\boldsymbol{x}^2}x}{q^{-2\bar{\boldsymbol{x}}^2}\bar{x} - q^{-2\boldsymbol{x}^2}x}\frac{q^{-2\boldsymbol{y}^2}y - q^{-2\boldsymbol{x}^2}x}{q^{2\boldsymbol{y}^2}y - q^{2\boldsymbol{x}^2}x} = \frac{x - a_1^2}{x - a_5^2}$$

と書き換えられる。同様に、中点 $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{v_3} + \boldsymbol{v_4} + \boldsymbol{v_5} + \boldsymbol{v_6})/4$, $\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{v_4} + \boldsymbol{v_5} + \boldsymbol{v_6} + \boldsymbol{v_7})/4$, $\underline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{v_5} + \boldsymbol{v_6} + \boldsymbol{v_7} + \boldsymbol{v_8})/4 = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3} + \boldsymbol{v_4})/4$ における非線形変数を $\tilde{y}, \hat{y}, \underline{x}$ と書くと、以下が成り立つ。

$$\frac{q^{2\boldsymbol{y}^2}y - q^{2\boldsymbol{x}^2}x}{q^{-2\boldsymbol{y}^2}y - q^{-2\boldsymbol{x}^2}x}\frac{q^{-2\tilde{\boldsymbol{y}}^2}\tilde{y} - q^{-2\boldsymbol{x}^2}x}{q^{2\tilde{\boldsymbol{y}}^2}\tilde{y} - q^{2\boldsymbol{x}^2}x} = \frac{x - a_2^2}{x - a_6^2}$$

$$\frac{q^{2\tilde{\boldsymbol{y}}^2}\tilde{y}-q^{2\boldsymbol{x}^2}x}{q^{-2\tilde{\boldsymbol{y}}^2}\tilde{y}-q^{-2\boldsymbol{x}^2}x}\frac{q^{-2\hat{\boldsymbol{y}}^2}\hat{y}-q^{-2\boldsymbol{x}^2}x}{q^{2\hat{\boldsymbol{y}}^2}\hat{y}-q^{2\boldsymbol{x}^2}x}=\frac{x-a_3^2}{x-a_7^2}$$

$$\frac{q^{2\hat{\boldsymbol{y}}^2}\hat{y}-q^{2\boldsymbol{x}^2}x}{q^{-2\hat{\boldsymbol{y}}^2}\hat{y}-q^{-2\boldsymbol{x}^2}x}\frac{q^{-2\underline{\boldsymbol{x}}^2}\underline{x}-q^{-2\boldsymbol{x}^2}x}{q^{2\underline{\boldsymbol{x}}^2}\underline{x}-q^{2\boldsymbol{x}^2}x}=\frac{x-a_4^2}{x-a_8^2}$$

以上の4式の辺々を掛けて、

$$\frac{q^{2\bar{\boldsymbol{x}}^2}\bar{x}-q^{2\boldsymbol{x}^2}x}{q^{-2\bar{\boldsymbol{x}}^2}\bar{x}-q^{-2\boldsymbol{x}^2}x}\frac{q^{-2\underline{\boldsymbol{x}}^2}\underline{x}-q^{-2\boldsymbol{x}^2}x}{q^{2\underline{\boldsymbol{x}}^2}\underline{x}-q^{2\boldsymbol{x}^2}x}=\frac{x-a_1^2}{x-a_5^2}\frac{x-a_2^2}{x-a_6^2}\frac{x-a_3^2}{x-a_7^2}\frac{x-a_4^2}{x-a_8^2}$$

を得る。これはベクトル $(\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}+\boldsymbol{v_3}+\boldsymbol{v_4})/4$ 方向の発展を記述する発展方程式であり、適当な変数変換のもとで、q 離散 Painlevé VI 方程式 (1) そのものになっている。

5 まとめ

以上のように、格子の geometry さえわかってしまえば、ただ一つの双線形方程式 (2) だけから、すべての Bäcklund 変換や発展方程式を容易に構成することができる。もともとの発展方向（$(\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}+\boldsymbol{v_3}+\boldsymbol{v_4})/4$）だけでなく、すべての可能な発展方向（7次元空間）を考えることによって、対称性の高い構造が明らかになってくる。このような対称性による記述を、例えば野海、山田によって与えられた方程式系 [3] などの、より高階の可積分力学系に対しても構成していくことは、今後の課題である。

References

1) B. Grammaticos and A. Ramani, Phys. Lett. A **257** (1999) 288.

2) H. Sakai, PhD thesis, Kyoto University (1999); "楕円差分 Painlevé 方程式", 本講究録掲載.

3) M. Noumi and Y. Yamada, math.QA/9804132, math.QA/9808003.